

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12. 1. 2. Logaritma Fonksiyonu

12. 1. 2. 1. Logaritma fonksiyonu ile üstel fonksiyonu ilişkilendirerek problemler çözer.

a) $a \in \mathbb{R}^+ - \{ 1 \}$ olmak üzere logaritma fonksiyonunun grafiği üstel fonksiyonun grafiğinden yararlanarak çizilir. $y = a^x$ ve $y = \log_a x$ fonksiyonlarının grafiklerinin $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğu belirtilir.

b) $a \in \mathbb{R}^+ - \{ 1 \}$ olmak üzere $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f (x) = \log_a x$ logaritma fonksiyonunun $a > 1$ için artan fonksiyon, $0 < a < 1$ için azalan fonksiyon olduğu verilir. a 'nın aldığı değerlere göre logaritma fonksiyonunun grafiğinin değişimini incelemek için bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır.

12. 1. 3. Üstel, Logaritmik Denklemler ve Eşitsizlikler

Terimler ve Kavramlar: Üstel denklem, logaritmik denklem

12. 1. 3. 1. Üstel, logaritmik denklemlerin ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur.

12. 1. 3. 2. Üstel ve logaritmik fonksiyonları gerçek hayat durumlarını modellemede kullanır.

a) Gerçek hayat durumlarından nüfus artışı, bakteri popülasyonu, radyoaktif maddelerin bozunumu (yarı ömür), fosil yaşlarının tayini, deprem şiddeti (Richter ölçeği), pH değeri, ses şiddeti (desibel) gibi örneklerle yer verilir.

b) İsraf ve tasarruf kavramları hakkında farkındalık oluşturan örneklerle yer verilir.

c) Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır.

Logaritma Fonksiyonunun Grafiği

$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = \log_a x$ logaritma fonksiyonunun grafiğini çizmek için;

- x 'e a tabanına uygun değerler verilerek fonksiyonun geçtiği noktalar işaretlenir.
- Logaritma fonksiyonun tanım kümesi için grafiğin **sınırı** belirlenir. Bulunan noktalardan geçen eğri grafiği çizilir.

Örnek: $y = f(x) = \log_2(x - 1)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

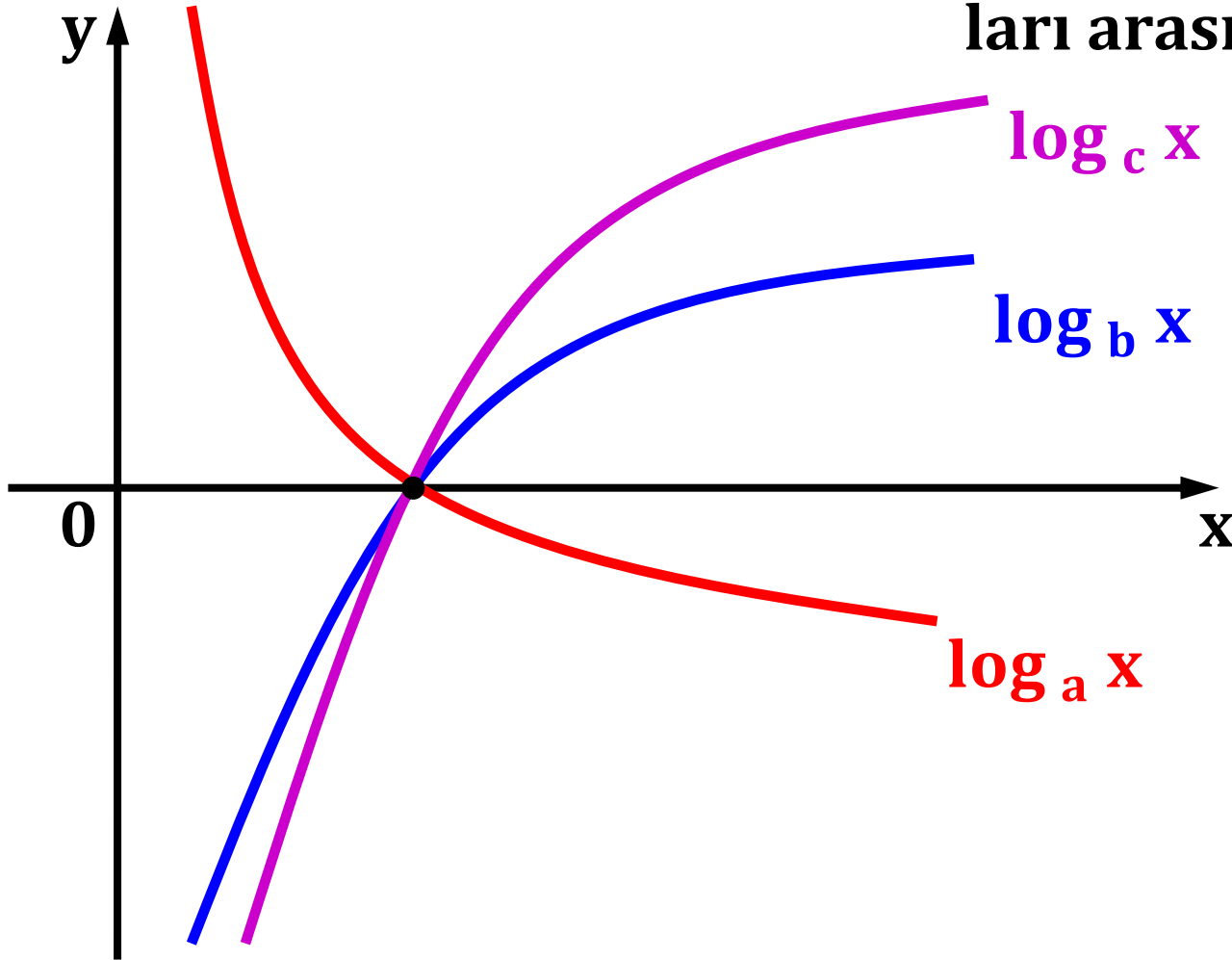
Soru : $y = f(x) = \log_3(x + 1)$ fonksiyonunun grafiğini çizip, fonksiyonun artan – azalan ve bire – bir olma durumunu inceleyiniz.

Soru: $y = f(x) = \log_2 x - 3$ fonksiyonunun grafiğini çizip,
fonksiyonun artan – azalan ve bire – bir olma durumunu inceleyiniz.

Soru: $y = f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 2)$ fonksiyonunun grafiğini çizip, fonksiyonun artan – azalan ve bire – bir olma durumunu inceleyiniz.

Not : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunda; **A)** $a > 1$ ise fonksiyon **artandır.** **B)** $0 < a < 1$ ise fonksiyon **azalandır.**
Grafik çiziminden de istenen görülebilir.

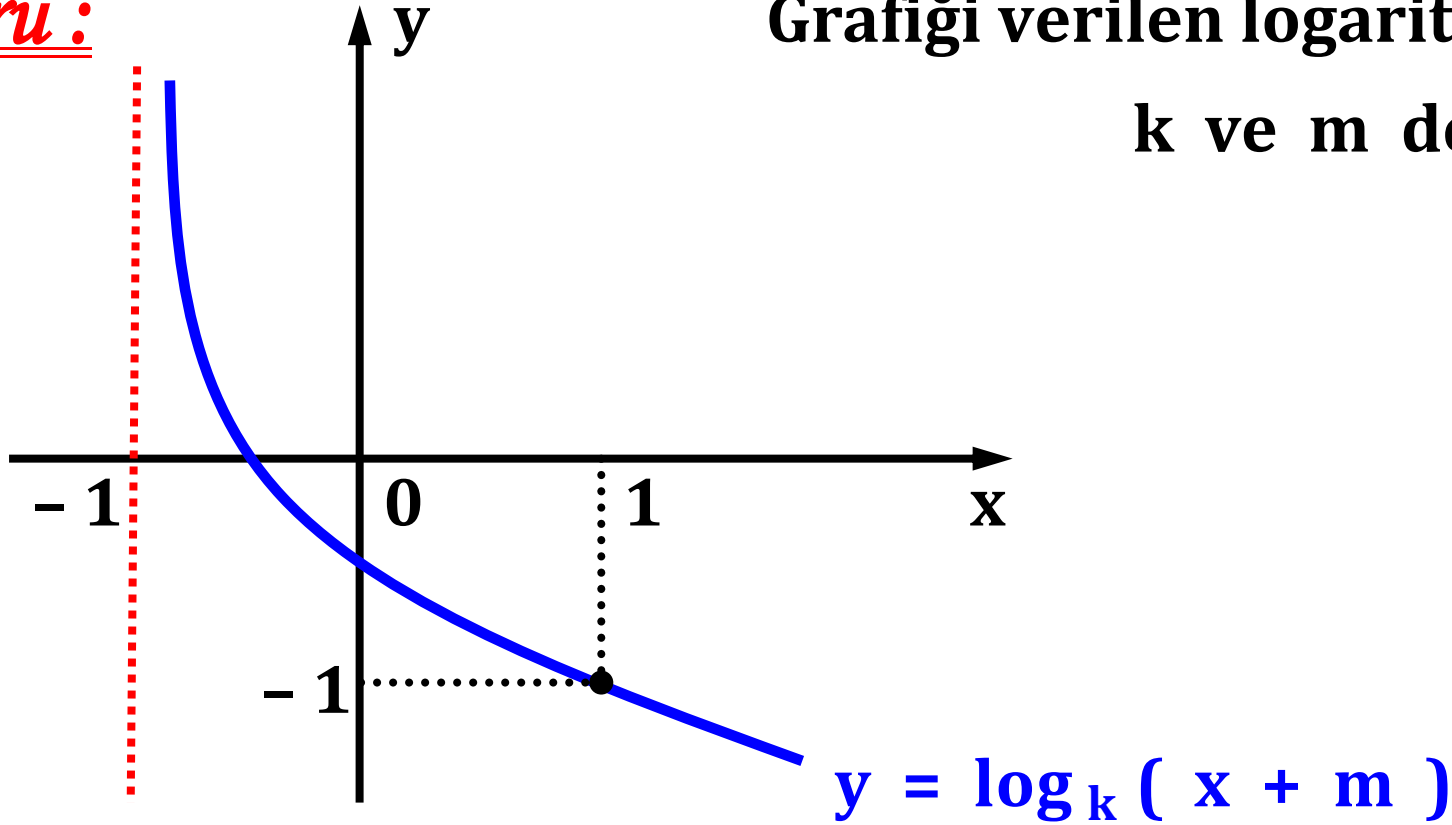
Soru : Grafiği verilen logaritma fonksiyonları için a , b ve c sayıları arasındaki sıralamayı bulunuz.



Not : Grafiği verilen logaritma sorularında, logaritmanın tanım kümesi ve grafiğin geğtiği noktalardan yararlanılır.

Soru :

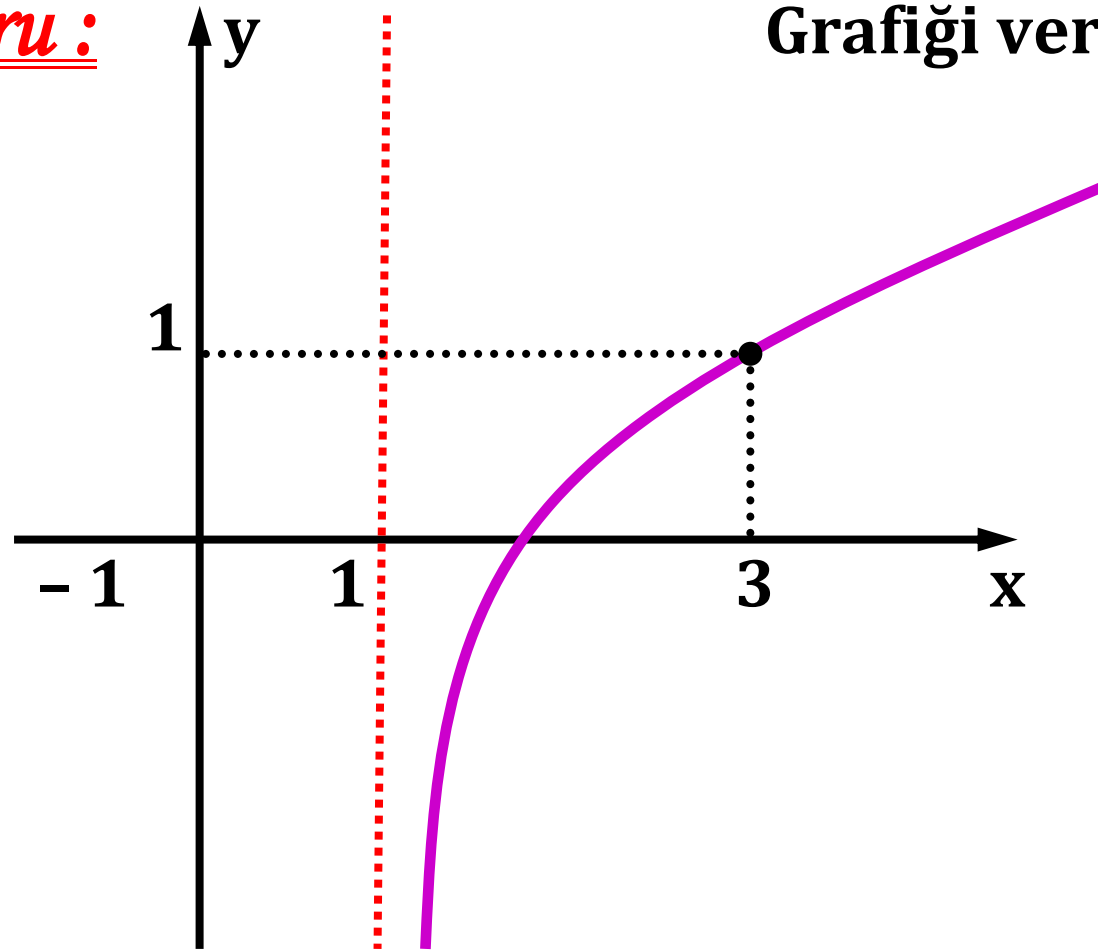
Grafiği verilen logaritma fonksiyonu için
k ve m deđerlerini bulunuz.



Soru :

Grafiği verilen logaritma fonksiyonu için

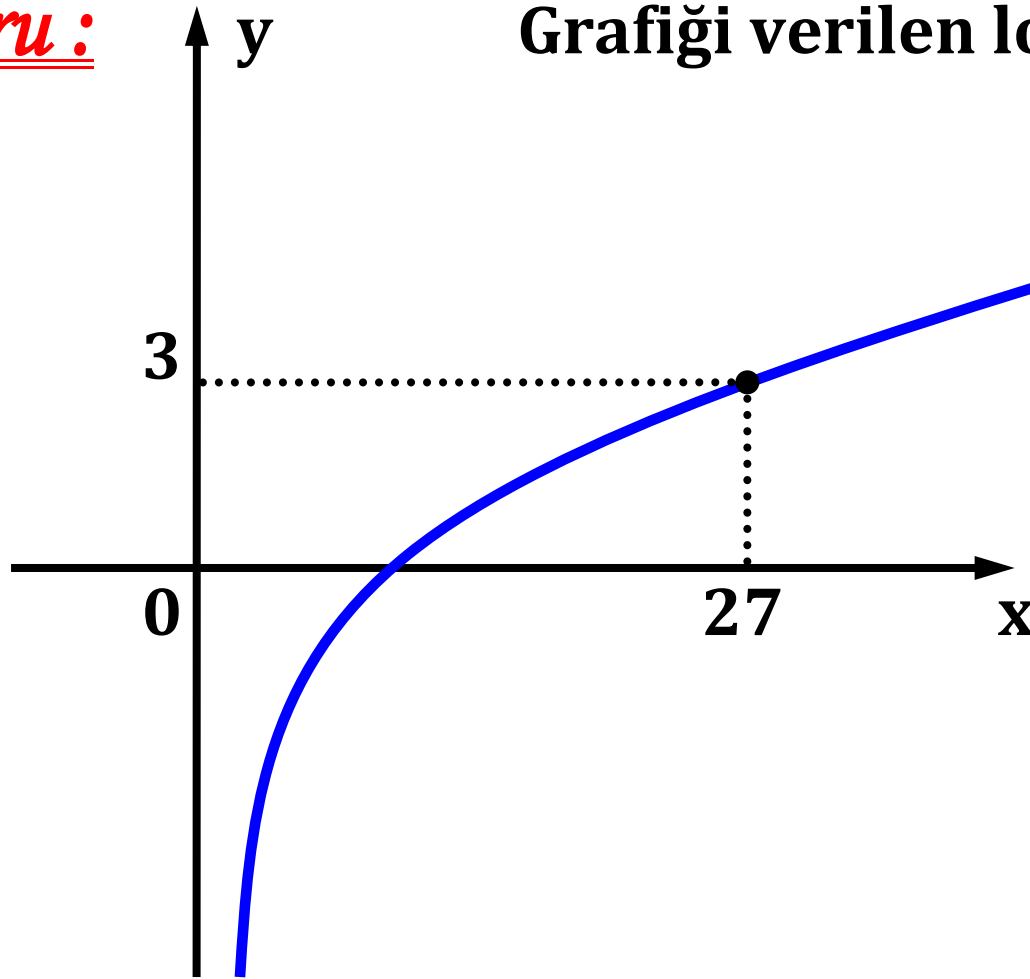
$$k + m = ?$$



$$y = \log_k(x - m)$$

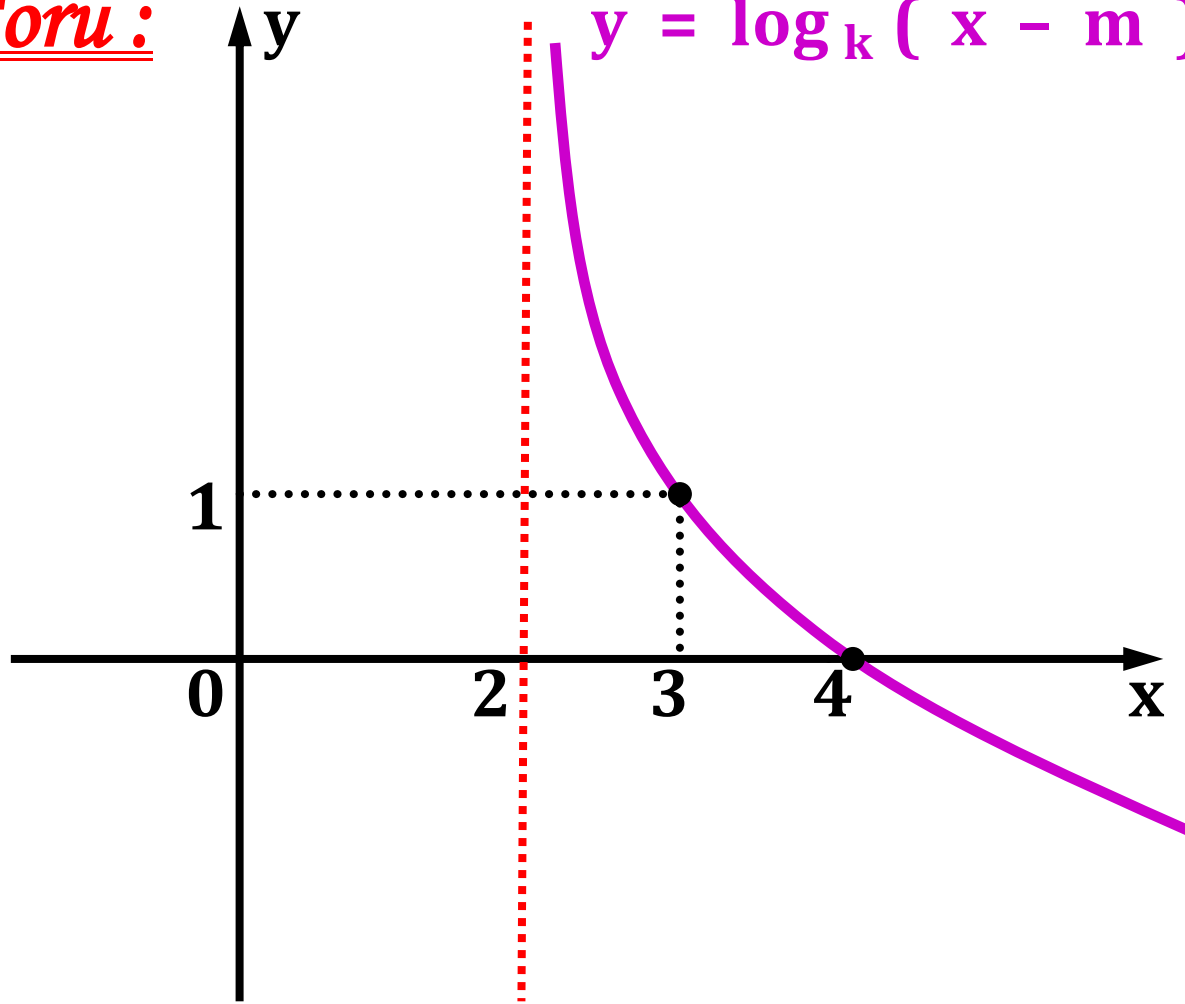
Soru :

Grafiği verilen logaritma fonksiyonu için f fonksiyonu için $f \circ f (3) = ?$



$$y = f (x) = \log_a (x + b)$$

Soru :



$$y = \log_k(x - m) + n$$

Grafiği verilen loga-
ma fonksiyonu için
 $k \cdot m \cdot n = ?$

Not : $y = f(x) = a^x$ ile bu fonksiyonun tersi olan

$y = f^{-1}(x) = \log_a x$ fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğru-
suna göre birbirlerine simetriktirler.

Soru : $y = 2^x$ ile $y = \log_2 x$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı
koordinat sisteminde çizip inceleyiniz.

Soru: $y = f(x) = 2^{3x-1}$ fonksiyonunun $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan fonksiyonun denklemini bulunuz.

Üstel Denklemler

Bilinmeyenlerin üs olarak kullanıldığı denkleme “**üstel denklem**” adı verilir. Denklemlerin çözümünde üslü ifadelerin ve logaritmanın özelliklerinden yararlanır.

- $a^x = b^x$ ise $a = b$
- $a^x = b$ ise $x = \log_a b$ olarak alınır.

Soru: $2^{-1+3x} = \frac{1}{32}$ ise $x = ?$

Soru : $8^{3x + 2} = 16^{2x + 10}$ ise $x = ?$

Soru : $\frac{1}{2^x - 3} = \sqrt{2}^{x+51}$ ise $x = ?$

Soru : $3^{x+3} + 3^{x+1} = 810$ ise $x = ?$

Soru : $5^{2x-7} = 3$ ise $x = ?$

Soru : $6^{x-1} = 3^{x+2}$ ise $x = ?$

Soru : **$9^{x+1} = 6^{2x+1}$ ise $x = ?$**

Soru : $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$ ise $x = ?$

Soru : $9^x - 3^{x+2} + 14 = 0$ ise $x = ?$

Soru : $e^{2x} - 9 \cdot e^x + 20 = 0$ ise $x = ?$

Soru : $e^x - \frac{8}{e^x} = 2$ ise $x = ?$

Soru : $25^x - 3 \cdot 10^x + 2 \cdot 4^x = 0$ ise $x = ?$

Soru : $9^x - 5 \cdot 15^x + 4 \cdot 25^x = 0$ ise $x = ?$

Logaritmik Denklemler

Bilinmeyen içeren logaritmali denkleme “logaritmik denklem” adı verilir. Denklemlerin çözümünde üslü ifadelerin ve logaritmanın özelliklerinden yararlanılır.

- $\log_a f(x) = b$ ise $f(x) = a^b$ olarak alınır.
($a > 0$, $a \neq 1$ ve $f(x) > 0$ olmalıdır.)
- $\log_a f(x) = \log_a h(x)$ ise $f(x) = h(x)$ olarak alınır. ($a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ ve $h(x) > 0$ olmalıdır.)

Soru: $\log_7 (3x - 5) = 2$ ise $x = ?$

Soru : $\log_5 \left(\frac{2x + 3}{10} \right) = -1$ ise $x = ?$

Soru : $\log_7 [\log_2 (x - 4)] = 1$ ise $x = ?$

Soru : $\log_5 [20 + \log_2 (3 + x)] = 2$ ise $x = ?$

Soru : $\log_2 [\log_3 (3 - 2x) + 12] = 4$ ise $x = ?$

Soru : $\log [\log_3 (- 5x + 2) + 97] = 2$ ise $x = ?$

Soru: $\ln [\log_2 \{ \log_5 (6x + 1) \}] = 0$ ise $x = ?$

Soru : $2^{1 + \log_4 x} = 6$ ise $x = ?$

Soru : 0,125 sayısının hangi tabandaki logaritmasının sonucu
- 3 'tür ?

Soru : $\log_3 x + \log_3 (x + 6) = 3$ ise $x = ?$ (Ayrı logaritmalarda bulunan çözüm logaritmanın şartını sağlamalıdır.)

Soru : $\log_2 (x - 6) + \log_2 (x + 8) = 5$ ise $x = ?$

Soru : $\log_5 (2x - 1) - \log_5 (x + 1) = 1$ ise $x = ?$

Soru : $\frac{1}{\log_{72} x} - \frac{1}{\log_2 x} = 2$ ise $x = ?$

Soru : x ve y pozitif tamsayılardır. $\log (x . y) = 8$ ve $\log (x / y) = 6$ ise x ile y sayılarını bulunuz.

Soru : $\log a - \log b = \log (a - b)$ ise a 'nın b cinsinden sonucunu bulunuz.

Soru : $\sqrt{\log_3 x} + \log_3 x - 2 = 0$ ise $x = ?$ (Değişken değiştir-
me yapılması çözümü kolaylaştırır.)

Soru : $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 - 5 = 0$ ise $x = ?$

Soru : $\log_2 x = \log_x 2$ ise $x = ?$

Soru : $\log_3 x + \log_x 3 - 2 = 0$ ise $x = ?$

Soru : $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$ ise $x = ?$

Soru : $x^{\log x} = x \cdot 10^6$ ise $x = ?$ (x tabanı karşıya logaritmanın tabanı olarak geçirilir. Veya eşitliğin iki tarafında da uygun tabanlı logaritma alınabilir.)

Soru : $9x = x^{\log_3 x}$ ise $x = ?$

Soru : $5^{\log x} + x^{\log 5} = 50$ ise $x = ?$

Üstel Eşitsizlikler

$2^2 < 2^3$ ise $4 < 8$ olur. Kuvvetlere bakarsak $2 < 3$ 'tür.

$(1/2)^2 < (1/2)^3$ ise $1/4 > 1/8$ olur. Yani $0,25 > 0,125$ olur. Kuvvetlere bakarsak $2 < 3$ 'tür.

Üstel eşitsizliklerde $a^{h(x)} < a^{k(x)}$ olsun.

- $a > 1$ ise $h(x) < k(x)$ olarak alınır. 1 'den büyük sayıların kuvveti büyüdükçe kesrin değeri de büyür.
- $0 < a < 1$ ise $h(x) > k(x)$ olarak alınır. 0 ile 1 arasındaki sayıların kuvveti büyüdükçe kesrin değeri de küçülür.

Soru: $\left(\frac{5}{2} \right)^{3x + 14} < \left(\frac{5}{2} \right)^{-x + 2}$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin çözüm kümesini bulunuz.

Soru: $\left(\frac{3}{11} \right)^{x+4} < \left(\frac{3}{11} \right)^{2x-2}$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin; **A)** Çözüm kümesini bulunuz.

B) Çözüm kümesindeki doğal sayıların toplamı kaç olur ?

Soru: $\left(\frac{4}{7} \right)^{x-1} > \left(\frac{7}{4} \right)^{5-3x}$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin çözüm kümesini bulunuz.

Soru: $(9/25)^{-x-1} < (3/5)^{2x-1}$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinden en büyük negatif tam sayıyı bulunuz.

Soru: $\left(\frac{4}{9} \right)^{x+1} \leq \left(\frac{27}{8} \right)^{x-2}$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin çözüm kümesini bulunuz.

Logaritmali Eşitsizlikler

Kural 1: Logaritmali eşitsizlik $\log_a h(x) < \log_a k(x)$ olarak verilsin.

- $a > 1$ ise $h(x) < k(x)$ olarak alınır. Logaritma fonksiyonu artandır ve eşitsizlik yön değiştirmez.

$4 < 8$ olsun. $\log_2 4 < \log_2 8 \longrightarrow \log_2 2^2 < \log_2 2^3$
 $2 \cdot \log_2 2 < 3 \cdot \log_2 2 \longrightarrow 2 < 3$ olur. Yani işlem doğrudur.

- Ayrıca $h(x) > 0$ ve $k(x) > 0$ olmalıdır.

*** Bulunan çözüm aralıklarının ortak olduğu kısım bize

logaritmali eşitsizliğin çözüm kümesini verir.

Not: *** Tabanı eşitsizliğin karşısına atıp, eşitsizliği aynı almak çözümü kolaylaştırır.

Soru : $\log_3 (x + 5) < 2$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\log (2x - 12) \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplam kaç olur ?

Soru : $3 \cdot \log_2 (2x - 4) - 5 \geq 1$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?

Soru : $\log_5 (3 - x)^2 + 6 < 10$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?

Soru: $f(x) = \sqrt{2 - \log_3(x - 1)}$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur?

Soru : $\log_5 x + \log_5 3 \leq 2$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?

Soru : $1 < \log_3 (2x - 1) < 2$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?

Soru : $1 \leq \log_2 (6 - x) < 3$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı ne olur ?

Soru : $\log_2 [\log_3 (x + 2)] \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?

Soru : Bir ABC üçgeninde; $|AB| = \log 3$, $|BC| = \log 6$ ve $|AC| = \log 2x$ ise x 'in alabileceği kaç tamsayı değeri vardır ?

(**Hatırlatma :** (Üçgen Eşitsizliği) Kenar uzunluğu a , b ve c br olan bir üçgende $|a - b| < c < a + b$ olarak alınırdı.)

Soru : $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x + 1) > 5$ eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz. (Çözümde tablo sisteminden faydalanılır.)

Soru : $\log_3 (x - 3) - \log_3 (x + 2) < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Kural 2: Logaritmalı eşitsizlik $\log_a h(x) < \log_a k(x)$ olarak verilsin.

$0 < a < 1$ ise $h(x) > k(x)$ olarak alınır. Logaritma fonksiyonu azalandır ve eşitsizlik yön değiştirir.

$$4 < 8 \text{ olsun. } \log_{1/2} 4 < \log_{1/2} 8 \longrightarrow$$

$$\log_{2^{-1}} 2^2 < \log_{2^{-1}} 2^3 \longrightarrow -1 \cdot 2 \cdot \log_2 2 < -1 \cdot 3 \cdot \log_2 2$$

$-2 < -3$ olur. Yani işlem yanlış oluyor. Bu yüzden işlemde eşitsizlik yön değiştirmelidir.

$$4 < 8 \text{ olsun. } \log_{1/2} 4 > \log_{1/2} 8 \text{ olarak alınır.}$$

- Ayrıca $h(x) > 0$ ve $k(x) > 0$ olmalıdır.

*** Bulunan çözüm aralıklarının ortak olduğu kısım bize logaritmalı eşitsizliğin çözüm kümesini verir.

Not: *** Tabanı eşitsizliğin karşısına atıp, eşitsizliği yön değiştirmek çözümü kolaylaştırır.

Soru : $\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) > 2$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının
çözüm aralığı ne olur ?

Soru : $\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının
çözüm aralığı ne olur ?

Soru : $\log_3 \left[\log_{\frac{1}{2}} (4 - x) \right] < 1$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?

Soru : $\log_{\frac{3}{4}} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Gerçek Hayat Durumları İle İlgili Üstel ve Logaritmik Fonksiyon Problemleri

Gerçek hayat durumlarından; nüfus artışı, bakteri popülasyonu, radyoaktif maddelerin bozunumu (yarı ömür), fosil yaşlarının tayini, deprem şiddeti (Richter ölçeği), pH değeri, ses şiddeti (desibel) gibi örneklerle karşılaşmaktadır.

Soru : Radyoaktif bir maddenin başlangıçtaki miktarı N_0 gr, bozunması sonucu kalan madde miktarı N gr ve geçen süre t saat olmak üzere $N = N_0 \cdot e^{-t/40}$ denklemi ile modellenmektedir. Buna göre başlangıçta 3200 gr olan bir radyoaktif maddeden 7200 dk sonra kaç gr kalacağını bulunuz. (Cevabı e türünden bulunuz.)

Soru : Bileşik faiz, bir birim dönemde elde edilen anapara ve faiz toplamının sonraki birim dönemlerde hesaba anapara olarak katılarak bu yeni tutar üzerinden faiz hesaplanmasıdır. A anapara, n faiz oranı ve t faizin uygulandığı zamanı göstermek üzere;

$S = A \cdot (1 + n / 100)^t$ eşitliği, süre sonunda ele geçen parayı göstermektedir. Buna göre 100000 ₺ 'si olan bir kişi bankaya % 20 bileşik faiz üzerinden 5 yıl boyunca parayı yatırırsa süre sonunda eline kaç ₺ para geçer ?

Soru : Bir bölgede ortaya çıkan bir virüsün o bölgedeki insanlara bulaşmaya başladığı görülmüştür. Virüs bulaşan bir kişinin virüsü her ayın sonunda 3 kişiye daha bulaştırdığı tespit edilmiştir.

A) Süreç 1 kişi ile başlasaydı her ayın sonundaki toplam virüslü sayısı soldaki kısma sıra ile yazılacaktır. Buna göre t ay sonunda virüsün toplamda kaç kişiye bulaşacağını hesaplayınız.

Başlangıç :

1 kişi

1. Ay :

2. Ay :

3. Ay :

4. Ay :

.

.

t. Ay :

B) Bölgedeki 4096 kişiye virüsün bulaşması kaç ayı bulur ?

Soru : Bir bakteri türünün sayısı her saatte 2 katına çıkmaktadır.

Başlangıçtaki bakteri sayısı 10 olduğuna göre;

A) t saat sonraki toplam bakteri sayısını veren ifadeyi bulunuz.

B) Bu bakteri türü yaklaşık kaç saat sonra başlangıçtaki sayısının 100000 katı olur ? ($\log 2 \cong 0,2$ alınız.)

Not : (x Katına Çıkma Süresi) Popülasyonun başlangıç hacmi n_0 ve popülasyonun x katına çıkma süresi a olsun. Bu durumda t zamanında popülasyonun hacmi $n(t) = n_0 \cdot x^{t/a}$ şeklindedir. Burada a ve t aynı zaman birimlerinde ölçümlenir.

Soru : İdeal koşullar altında belirli bakteri popülasyonu her bir dört saatte üç katına çıksın. Başlangıçta bir koloni de 5000 bakteri olsun. Kaç saat sonra kolonideki bakteri miktarı 135000 olur ?

Soru : Hidrojen iyonu derişimi (bir çözeltide çözünmüş olarak bulunan madde miktarına) matematiksel olarak $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$ eşitliğinden elde edilmektedir. $\text{pH} < 7$ ise çözelti asidik, $\text{pH} = 7$ ise çözelti nötr, $\text{pH} > 7$ ise çözelti baziktir. Buna göre;

A) pH değeri 5 olan bir çözeltideki $[\text{H}^+]$ derişimini bulunuz.

B) $[\text{H}^+]$ değeri $3 \cdot 10^{-8}$ olan çözeltinin pH değerini bularak, asit – bazik durumunu inceleyiniz. ($\log 3 \cong 0,4$ alınız.)

Soru : Bir ses kaynağının ses düzeyi olan desibel (dB) ; oluşturduğu ses şiddetinin, uluslar arası ses şiddeti $I_0 = 10^{-12}$ watt/m² (bir insanın duyabileceği en düşük ses şiddeti) değerine oranlaması ile bulunur. I : Kaynağın ses şiddeti , L = Ses düzeyi olmak üzere (dB) $L = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ ifadesi ile bulunur. Ses seviyesi ve açıklaması alttaki tabloda örnek olarak verilmiştir.

Ses Seviyesi : 0 dB	İnsan kulağının duyabileceği en düşük ses şiddeti
30 dB	Fısıltı, sessiz konuşma
50 dB	Buzdolabı, havalandırma sesi
70 dB	Tv, bilgisayar sesi
80 dB	Alarm sesi, fabrika gürültüsü
100 dB	Çöp kamyonu sesi
120 dB	Gök gürültüsü, uçağın havalanışı

130 dB	Delici çekiç (İnsan kulağının zarar görmeden duyabileceği en büyük ses şiddeti)
150 dB	Jet uçağının kalkışı

Buna göre;

A) Bir ses kaynağının şiddeti 10^{-7} watt/m² ise ses düzeyi kaç dB olur ? Ayrıca ses düzeyi tablodaki hangi gruba dahildir ?

**B) 70 dB ses düzeyine sahip olan ses şiddeti, fısıltı ile konuşma-
dan çıkan ses düzeyinin kaç katı ses şiddetine sahiptir ?**

Soru : Genlik, bir dalganın normal konumundan yükselme ve alçalma mesafesidir. Genlik, dalgayı ortaya çıkaran enerjinin miktarına bağlıdır. Mikron ($1 \text{ mm} = 10^3 \text{ mikron}$) cinsinden ölçülen maksimum genliğe (şiddetine) d ve depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğüne R denilir. $R = \log d$ ile hesaplanır. Buna göre;
A) Maksimum genliği 80 mm olarak ölçülen bir depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğünü bulunuz. ($\log 2 \cong 0,301$ alınız.)

B) Richter ölçeğine göre; 1992 yılındaki Erzincan'da yaşanan 6,8 büyüklüğündeki deprem, 2019 yılında İstanbul'da yaşanan 5,8 büyüklüğündeki depremin şiddetinin kaç katıdır ?